Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 18-12-2023

Vraag 1a - 6 punten

$f'(x) = 12x^2 + 18x - 12$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 12 \cdot -12}}{2 \cdot 12} = \dfrac{-18 \pm \sqrt{900}}{24}$

Dit geeft $x = \frac{-18+30}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ of $x = \frac{-18-30}{24} = \frac{-48}{24} = -2$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{8} + \frac{9}{4} - 6 = -3\frac{1}{4}$; $f(-2) = -32 + 36 + 24 = 28$

Dit geeft $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{28 - \left(-3\frac{1}{4}\right)}{-2 - \frac{1}{2}} = \frac{31\frac{1}{4}}{-2\frac{1}{2}} = -12\frac{1}{2}$

Vraag 1b - 6 punten

$g'(x) = \dfrac{1 \cdot (3x-2) - (x-2) \cdot 3}{(3x-2)^2} = \dfrac{4}{(3x-2)^2}$

$g'(x) = 1 \Leftrightarrow (3x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow 3x - 2 = 2 \vee 3x - 2 = -2 \Leftrightarrow 3x = 4 \vee 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \vee x = 0$

Alternatief: $g'(x) = 1 \Leftrightarrow (3x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 4 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x = 0$

$\Leftrightarrow x(9x - 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 9x = 12 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{3}$

Vraag 1c - 5 punten

Eerst P vrijmaken geeft:

$\log(P) = 4 + 2\log(Q) \Leftrightarrow 10^{\log(P)} = 10^{4+2\log(Q)} \Leftrightarrow P = 10^{4+2\log(Q)}$

$10^{4+2\log(Q)} = 10^4 \cdot 10^{2\log(Q)} = 10\,000 \cdot 10^{\log(Q^2)} = 10\,000 \cdot Q^2$

$P = 10\,000 \cdot Q^2 \Leftrightarrow Q^2 = \frac{P}{10\,000} \Leftrightarrow Q = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{10\,000}} = \frac{P^{\frac{1}{2}}}{100}$

Dit geeft $a = \frac{1}{100}$ en $b = \frac{1}{2}$

Eerst log(Q) vrijmaken geeft:

$\log(P) = 4 + 2\log(Q) \Leftrightarrow 2\log(Q) = \log(P) - 4 \Leftrightarrow \log(Q) = \frac{1}{2}\log(P) - 2$

Dit geeft $10^{\log(Q)} = 10^{\frac{1}{2}\log(P)-2} \Leftrightarrow Q = 10^{\frac{1}{2}\log(P)-2}$

$10^{\frac{1}{2}\log(P)-2} = 10^{\frac{1}{2}\log(P)} \cdot 10^{-2} = 10^{\log\left(P^{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \frac{1}{100} = P^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{100}$

$Q = \frac{1}{100}P^{\frac{1}{2}}$ geeft $a = \frac{1}{100}$ en $b = \frac{1}{2}$

Eerst Q² vrijmaken geeft:

$\log(P) = 4 + 2\log(Q) \Leftrightarrow 2\log(Q) = \log(P) - 4 \Leftrightarrow \log(Q^2) = \log(P) - 4 \Leftrightarrow Q^2 = 10^{\log(P)-4}$

$10^{\log(P)-4} = 10^{\log(P)} \cdot 10^{-4} = P \cdot 10^{-4}$, dus $Q^2 = 10^{-4} \cdot P \Leftrightarrow Q = 10^{-2} \cdot P^{\frac{1}{2}}$

Dit geeft $a = 10^{-2} = \frac{1}{100}$ en $b = \frac{1}{2}$

Vraag 2a - 3 punten

$d(DC) = 7 - x,\ d(CB) = 4$

$\left(d(DB)\right)^2 = \left(d(DC)\right)^2 + \left(d(CB)\right)^2 = (7-x)^2 + 4^2$

Dit geeft $d(DB) = \sqrt{(7-x)^2 + 16} = \sqrt{49 - 14x + x^2 + 16} = \sqrt{x^2 - 14x + 65}$

Vraag 2b - 8 punten

$\frac{\mathrm{d}TK}{\mathrm{d}x} = 3 + 5 \cdot \frac{2x - 14}{2\sqrt{x^2 - 14x + 65}}$

$\frac{\mathrm{d}TK}{\mathrm{d}x} = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{2x - 14}{2\sqrt{x^2 - 14x + 65}} = -3 \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{x - 7}{\sqrt{x^2 - 14x + 65}} = -3 \Leftrightarrow 5(x-7) = -3\sqrt{x^2 - 14x + 65}$

Dit geeft $25(x-7)^2 = 9(x^2 - 14x + 65) \Leftrightarrow 25(x^2 - 14x + 49) = 9(x^2 - 14x + 65)$

$\Leftrightarrow 25x^2 - 350x + 1225 = 9x^2 - 126x + 585 \Leftrightarrow 16x^2 - 224x + 640 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 40 \Leftrightarrow (x-4)(x-10) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 10$

Kan uiteraard ook met de abc-formule.

Alleen $x = 4$ voldoet

Vraag 3a - 7 punten

$X = 2$ als de eerste twee sokken die George pakt dezelfde kleur hebben

$P(RR) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9};\ P(GG) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9};\ P(BB) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9}$

Dit geeft $P(X = 2) = \frac{12}{90} + \frac{12}{90} + \frac{2}{90} = \frac{26}{90} = \frac{13}{45}$

$X = 4$ als de eerste drie sokken die George pakt drie verschillende kleuren hebben
(de vierde sok is dan automatisch van een kleur die hij al gepakt heeft)

$P(RGB) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{32}{720} = \frac{2}{45}$

Er zijn 3! = 6 volgordes waarin George deze drie kleuren kan pakken, alle met dezelfde kans

Dit geeft $P(X = 4) = 6 \cdot \frac{2}{45} = \frac{12}{45}$

Vraag 3b - 5 punten

De enige andere mogelijkheid is $X = 3$

$P(X = 3) = 1 - \left(P(X = 2) + P(X = 4)\right) = 1 - \left(\frac{13}{45} + \frac{12}{45}\right) = 1 - \frac{25}{45} = \frac{20}{45}$

$E(X) = 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(X = 4) = 2 \cdot \frac{13}{45} + 3 \cdot \frac{20}{45} + 4 \cdot \frac{12}{45} = \frac{26+60+48}{45} = \frac{134}{45} \approx 2{,}9778$

Vraag 3c - 5 punten

$12{,}5 = 13 - 0{,}5 = \mu - \sigma$; $14 = 13 + 1 = \mu + 2\sigma$

Volgens de vuistregels heeft 68% een gewicht tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
en heeft 95% een gewicht tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$

Uit de symmetrie van de normale verdeling volgt dan dat 34% een gewicht heeft tussen $\mu - \sigma$ en μ
en dat 47,5% een gewicht heeft tussen μ en $\mu + 2\sigma$

Het percentage sokken met een gewicht tussen $\mu = \sigma$ en $\mu + 2\sigma$ is dus $34 + 47{,}5 = 81{,}5$

81,5% van 26 sokken is (afgerond) 21 sokken.

Vraag 3d - 4 punten

Voor iedere sok is de kans dat het gewicht groter is dan $\mu = 13$ g gelijk aan $\frac{1}{2}$

De kans dat precies 5 van de 10 sokken een gewicht groter dan 13 g hebben
is zodoende $\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{252}{1024} \approx 0{,}2461$

Vraag 4a - 2 punten

H_0: $\mu = 13$; H_1: $\mu \neq 13$

Vraag 4b - 4 punten

De toetsingsgrootheid *T* is het gemiddelde gewicht van de 16 sokken in de steekproef

$\mu_T = \mu = 13$; $\sigma_T = \frac{\sigma}{\sqrt{16}} = \frac{0{,}5}{4} = 0{,}125$

Vraag 4c - 2 punten

$0{,}033 > \frac{1}{2}\alpha = 0{,}025$, dus moet H_0 niet verworpen worden.

Alternatief:

$g_l = \mu_T - 1{,}96\sigma_T = 13 - 1{,}96 \cdot 0{,}125 = 12{,}755$

$g_l < 12{,}77 < \mu_T$, dus moet H_0 niet verworpen worden.

Vraag 5a - 4 punten

D is maximaal 20 en minimaal 5

Dit geeft $a = evenwichtstand = \frac{maximum+minimum}{2} = \frac{20+5}{2} = 12\frac{1}{2}$

en $b = amplitude = maximum - evenwichtsstand = 20 - 12\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$
$\left(= minumum + evenwichtsstand = \frac{maximum-minimum}{2}\right)$

De periode is 2; dit geeft $c = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Vraag 5b - 4 punten

D is minimaal als $\sin\left(\frac{2}{3}\pi t - \frac{3}{4}\pi\right) = -1 = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ $\left(= \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right)\right)$

Dit geeft $\frac{2}{3}\pi t - \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow \frac{2}{3}t - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3}t = \frac{9}{4} \Leftrightarrow t = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$

of $\frac{2}{3}\pi t - \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow \frac{2}{3}t - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3}t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t = \frac{3}{8}$

De periode is $\frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$

De eerste drie tijdstippen na $t = 0$ waarop *D* minimaal is, zijn dus
$t = \frac{3}{8}$ $\left(= 3\frac{3}{8} - 3\right)$; $t = 3\frac{3}{8}$ en $t = 6\frac{3}{8}$

Alternatief:

De periode is $\frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$

Voor het beginpunt geldt $\frac{2}{3}\pi t - \frac{3}{4}\pi = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}t = \frac{3}{4} \Leftrightarrow t = \frac{9}{8}$

Het minimum wordt bereikt op $\frac{3}{4}$ periode na $t = \frac{9}{8}$., dat is op $t = \frac{9}{8} + \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{27}{8} = 3\frac{1}{8}$

of op $\frac{1}{4}$ periode voor $t = \frac{9}{8}$, dat is op $t = \frac{9}{8} - \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{8}$

De eerste drie tijdstippen na $t = 0$ waarop *D* minimaal is, zijn dus
$t = \frac{3}{8}$ $\left(= 3\frac{3}{8} - 3\right)$; $t = 3\frac{3}{8}$ en $t = 6\frac{3}{8}$

Vraag 6a - 5 punten

De groeifactor over 10 jaar is $1 + \frac{44}{100} = 1{,}44$

Verdubbeling betekent $A(t) = 2A(0) \Leftrightarrow A(0) \cdot g^t = 2A(0) \Leftrightarrow g^t = 2$

$1{,}44^t = 2 \Leftrightarrow t = {}^{1{,}44}\log(2) \approx 1{,}9009\ (\times 10 \text{ jaar})$

Dit is afgerond 228 maanden, ofwel 19 jaar en 0 maanden

Alternatief:

De groeifactor over één maand is $\left(1 + \frac{44}{100}\right)^{1/120} = 1{,}44^{\frac{1}{120}} \approx 1{,}003043314$

Verdubbeling betekent $A(t) = 2A(0) \Leftrightarrow A(0) \cdot g^t = 2A(0) \Leftrightarrow g^t = 2$

$1{,}003043314^t = 2 \Leftrightarrow t = {}^{1{,}003043314}\log(2) \approx 228$

Vraag 6b - 3 punten

De groeifactor over 10 jaar is $1 + \frac{44}{100} = 1{,}44$

De groeifactor over 5 jaar is dus $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$

Dit komt overeen met een groei van 20%

Kan ook met $t = 0$ in 1950 en 10 jaar als tijdseenheid:

$$\frac{N(4) - N(3{,}5)}{N(3{,}5)} \times 100\% = \frac{N(0) \cdot 1{,}44^4 - N(0) \cdot 1{,}44^{3{,}5}}{N(0) \cdot 1{,}44^{3{,}5}} \times 100\% = \frac{1{,}44^4 - 1{,}44^{3{,}5}}{1{,}44^{3{,}5}} \times 100\% = 20\%$$

Vraag 6c - 6 punten

$N = 200 \Leftrightarrow 20(25 - 20\mathrm{e}^{-0{,}2t}) = 200 \Leftrightarrow 25 - 20\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 10 \Leftrightarrow -20\mathrm{e}^{-0{,}2t} = -15 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0{,}75$

Dit geeft $-0{,}2t = \ln(0{,}75) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}75)}{-0{,}2} \approx 1{,}4384$

Dat is 1 jaar en 5,26 maanden na 1 januari 1950, dus in juni 1951

Vraag 6d - 2 punten

Als $t \to \infty$ wordt $\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ vrijwel 0

Het maximale aantal inwoners is dus $20(25 - 20 \cdot 0) \times 1000 = 500\,000$